12 出人意表的證明

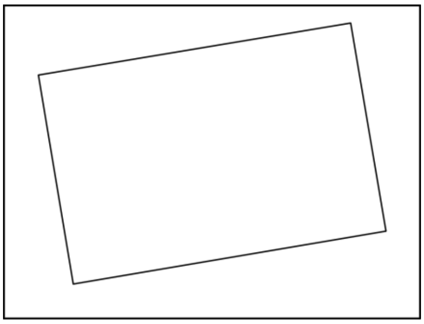
在這節裡，我們將使用“出人意表”或“不可思議”的方法來探討兩則與矩形有關的問題。

12.1 矩形的長、寬和問題

定理 12.1 如果一個矩形(長×寬$= l_2 \times w_2$)可以擺放在另一個矩形($l_1 \times w_1$)內(如下圖)，則不等式

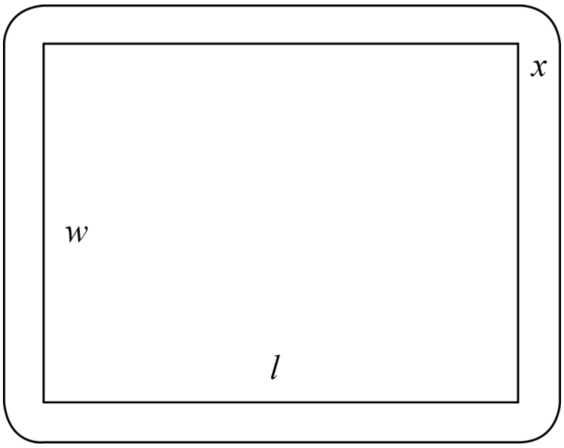
$$l_2 + w_2 \le l_1 + w_1$$

必須成立。



【出人意表的探索之一】將 $l \times w$ 的矩形，向外延伸 x 單位長度（如下圖所示，四個角落分別以四分之一圓延伸），則所得到的形狀之面積為

$$lw + 2(l+w)x + \pi x^2.$$



如果依樣畫葫蘆分別對矩行$l_1 \times w_1$及$l_2 \times w_2$做同樣的延伸。顯然的，小矩形$l_2 \times w_2$延伸後的圖形必須落在大矩形$l_1 \times w_1$延伸後的圖形內部，因此得到如下的面積不等式

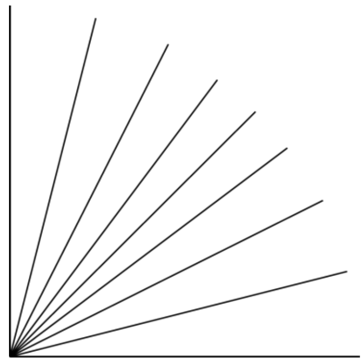
$$\begin{gathered} l_2 w_2 + 2(l_2 + w_2)x + \pi x^2 \le l_1 w_1 + 2(l_1 + w_1)x + \pi x^2 \\ \Rightarrow 2(l_1 + w_1 - l_2 - w_2)x + l_1 w_1 - l_2 w_2 \ge 0. \end{gathered}$$

因為上述不等式對所有的$x \ge 0$都成立，所以必須要

$$2(l_1 + w_1 - l_2 - w_2) \ge 0 \Rightarrow l_1 + w_1 \ge l_2 + w_2,$$

得證。

【出人意表的探索之二】如下圖所示：將 1 單位長的線段依逆時鐘方向旋轉，共轉出 9 個不同角度的線段（從 0 度到 90 度）。將此 9 個線段投影到水平線上，此時產生 9 個投影長度，最長為 1 單位長、最短為 0 單位長（分別由水平及垂直線段投影產生）。



如果將此 9 個投影長度加起來之後，再除以 9，則所得到的值是此 9 個投影長度的平均值。當然，這個平均值是個介於 0 與 1 之間的數。如果樣本夠多且夠均勻的話（也就是說，將 1 單位長的線段依逆時鐘方向旋轉出個個角度都有的線段，並將這些線段對水平線做投影），則所得到的投影長度平均值應該是

$$\frac{1}{2}.$$

利用這個概念到矩形問題上來。如果我們將大矩形（連擺在內部的小矩形）依逆時鐘方向旋轉出夠多且夠均勻樣本，並將大矩形與小矩形的長與寬對水平線做投影，則大矩形與小矩形的長與寬之投影平均值分別為

$$\frac{l_1+w_1}{2} \text{ 與 } \frac{l_2+w_2}{2}.$$

因為小矩形擺在大矩形內部，所以投影之後會有“小矩形的長與寬之投影長度和≤大矩形的長與寬之投影長度和”。因此我們有

$$\frac{l_2+w_2}{2} \le \frac{l_1+w_1}{2} \Rightarrow l_2+w_2 \le l_1+w_1 .$$

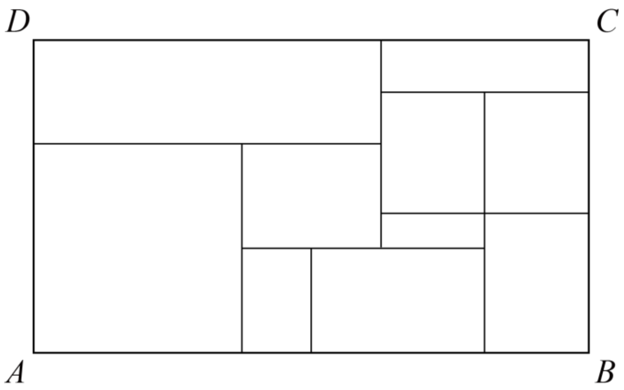
12.2 矩形分割問題

在這小節，我們探索一則矩形的分割問題。

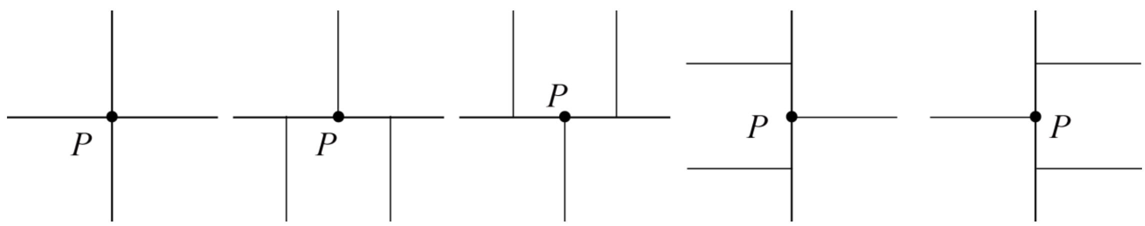
定理 12.2 如果一個大矩形可以分割成有限個小矩形且每個小矩形至少有一邊的邊長是正整數。那麼大矩形也一定有一邊的邊長是正整數。

本問題有兩種不同的解法，第一種方法比較初等（出人意表的），第二種方法則需要有微積分的基本知識。[8] 我們將微積分的證法放在本節的最後面。

【出人意表的證法】我們的目標是要證明大矩形的邊長至少有一邊是正整數。



首先將大矩形 $ABCD$ 放在座標平面的第一象限且 A 點與原點重合；B 點在 X 軸的正方向上。如果 P 點是某小矩形的頂點，則 P 點僅可能是如下的幾種情形之一：P 點在大矩形 $ABCD$ 的邊上或 P 點在大矩形 $ABCD$ 的內部，這時有如下的五種情況：



現在對每個小矩形的頂點 P 賦予−1, 0, 1 三個值如下：

(1) 若 P 點的 X, Y 座標皆為整數，則賦予 0 值。

(2) 若 P 點的 X, Y 座標不全為整數，則細分如下：

(a) 如果 P 點在小矩形的左下或右上角，則賦予 1 值；

(b) 如果 P 點在小矩形的左上或右下角，則賦予−1 值。

由上述給值的辦法知道：總共所定出來的數值有 4 倍小矩形的個數那麼多。現在我們想利用兩種不同的方法來求這些數字的和。

第一種求和法（將所有小矩形的四個角落的數字相加，再求所有數字的和）：容易檢查"任何小矩形上的四個值的和為 0"。因此所有數值的和為 0。

第二種求和法（將每個 P 點附近的數字相加，再求所有數字的和）：如果 P 是某小矩形上的一個頂點且不在大矩形 $ABCD$ 的邊上，則由上圖的五種情形知道：P 點附近所賦予的值（可能是 2 或 4 個值）的和亦為 0。如果 P 是在大矩形 $ABCD$ 的邊上且 $P \neq A, B, C, D$，則容易知道：P 點附近兩個賦予的值之和亦為 0。綜合這些結果知道：A, B, C, D 四點所賦予的值之和亦為 0。因為 A 是原點，所以賦予的值為 0；因此 B, C, D 三點至少有一點所賦予的值為 0。根據定義，此點必為格子點，所以大矩形的邊至少有一邊的邊長是正整數。

[8] 在 Americam Mathematical Monthly, 94(1987), pp. 601 − 617，Wagon 給予此問題十四種證明。

習題 12.1　關於定理 12.1，你是否有第三種證明呢？

習題 12.2　試將定理 12.1 的結果推到立體的情形。

習題 12.3　設 O 為座標平面上的原點，A, B 是以 O 為圓心，單位圓上的兩個點。若 $\angle AOB = 90^\circ$，則證明

$$(A\text{點的}x\text{座標})^2 + (B\text{點的}x\text{座標})^2 = 1.$$

此結果的立體情形為何(稱它為高斯定理)？

習題 12.4　有一個由有限個小箱子疊合而成的大箱子。如果每個小箱子的長，寬與高至少有一邊邊長為正有理數，則此大箱子的長，寬與高至少有一邊邊長為正有理數。

習題 12.5　有一個由有限個正方形疊合而成的大矩形。是否可以知道這個大矩形長與寬的邊長比值是一個有理數。試將此結果推到立體的情形。

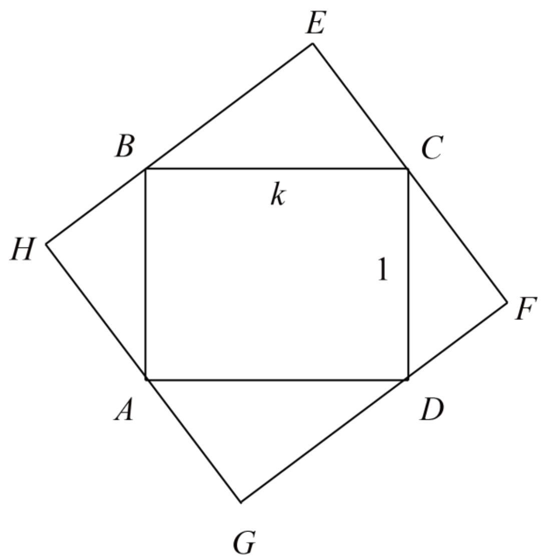
動手玩數學

一位木匠拿鋸子在任意四邊形的木板上鋸了兩下，將此木板鋸成三塊且其中有一塊的面積恰是四邊形木板面積的三分之一。你能知道木匠是如何辦到的嗎？

挑戰題

如下圖：矩形 $ABCD$ 的邊長 $BC = k > CD = 1$。若四邊形 $EFGH$ 也是矩形，則證明

$$\frac{HE}{EF} < k.$$



定理12.2的微積分作法

假設大矩形R被分割成n個小矩形，記為$R_1, R_2, \cdots, R_n$。現在考慮如下的積分

$$\begin{aligned}&\int_a^b \int_c^d \cos(2\pi(x+y)) + i\sin(2\pi(x+y))dxdy \\ &\quad = (\int_a^b \cos(2\pi x) + i\sin(2\pi x)dx) \times (\int_c^d \cos(2\pi y) + i\sin(2\pi y)dy).\end{aligned}$$

容易證得，上述積分為零的充份必要條件是$a-b$或$c-d$兩個數中至少有一個是整數。

現在對大矩形R的區域來積分，得到

$$\begin{aligned}&\iint_R \cos(2\pi(x+y)) + i\sin(2\pi(x+y))dxdy \\ &= \sum_{i=1}^{n} \iint_{R_1} \cos(2\pi(x+y)) + i\sin(2\pi(x+y))dxdy.\end{aligned}$$

因為每個小矩形R_i的兩個邊長中，至少有一個為正整數，所以上述積分為 0。即大矩形R的兩個邊長中，至少有一個為正整數。